MPSI 2022/2023 | DS n°3

Ce sujet est constitué de **3 parties indépendantes**, que les candidats pourront traiter dans l'ordre de leur choix.

La calculatrice est autorisée

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

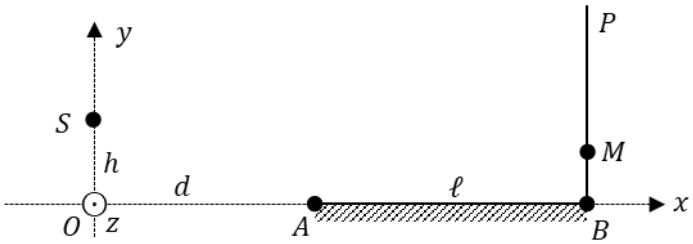
Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

I - Miroir de Lloyd

Le dispositif interférentiel, représenté sur la figure ci-contre est appelé miroir de Lloyd.

Une source ponctuelle S, située à une distance $OS = h$ du plan d'un miroir plan de longueur $AB = \ell$, émet dans toutes les directions une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0.



La distance $OA = d$ est telle que $h \ll d$.

On place un repère (x, y, z) centré sur O. On donne les coordonnées des différents points :

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} d+\ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} d+\ell \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On observe sur l'écran P une figure d'interférences à deux ondes : l'une provenant directement (sans réflexion) de S et l'autre issue de S et réfléchie par le miroir.

<u>Données</u> : $\ell = 24$ cm, $\lambda_0 = 600$ nm, $d = 1{,}0$ cm. L'indice optique de l'air est pris égal à 1.

1) Donner les coordonnées de S', image de S à travers le miroir.

2) Reproduire la figure et construire soigneusement le champ d'interférences, c'est-à-dire la zone de l'espace où se superposent le faisceau directement émis par S et le faisceau réfléchi sur le miroir.

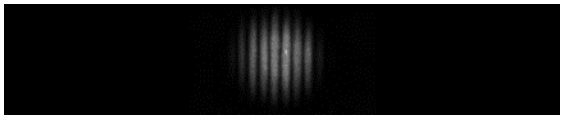
3) Construire les deux rayons issus de S qui interfèrent au point M du plan P.

4) Déterminer l'expression de la différence de marche $\delta(y, z)$ entre le rayon réfléchi et le rayon direct en tout point de l'écran, en fonction des caractéristiques géométriques et optiques du système. A-t-on une interférence constructive ou destructive au niveau du point B ?

5) Rappeler la formule de Fresnel pour deux ondes de même amplitude. En déduire l'intensité lumineuse (ou éclairement) $I(y, z)$ en tout point de l'écran.

6) Déterminer l'expression de l'interfrange i.

L'interfrange étant trop faible, on réalise avec un dispositif approprié, une image agrandie cinq fois du champ d'interférence. On obtient la figure suivante (après agrandissement) :



7) Reproduire qualitativement la figure ci-dessus et indiquer la direction des axes $(\mathrm{B}y)$ et $(\mathrm{B}z)$.

8) Mesurer l'interfrange i à l'aide d'une règle graduée et estimer l'incertitude-type $u(i)$ sur votre mesure. Bien expliquer la démarche.

9) L'interfrange mesuré par un capteur CCD vaut $i_0 = 1{,}497$ mm et $u(i_0) = 0{,}013$. Cette mesure est-elle compatible avec la vôtre ?

10) Exprimer puis calculer la distance h à l'aide de la valeur de i_0 indiquée à la question précédente.

En réalité, la figure d'interférence observée expérimentalement est la même que celle prédit à la question 4, mais décalé d'une demi interfrange.

11) A-t-on, dans ce cas, une interférence constructive ou destructive au niveau du point B ? Montrer que ce résultat est en accord avec l'apparition d'un déphasage de π du rayon issu de S' (remarque : *ce déphasage étant dû à la réflexion sur le miroir, phénomène hors programme*).

---------- Fin de la partie I ----------

II - Observation de Jupiter

On s'intéresse à quelques éléments du matériel d'un astronome amateur adepte de l'imagerie numérique et désirant photographier Jupiter lors d'une période favorable à son observation.

Pour un observateur terrestre, Jupiter est vue sous un angle α qui varie suivant la distance Terre-Jupiter. Les orbites de la Terre et de Jupiter sont assimilées à des cercles dans un même plan, ayant pour centre le Soleil, de rayons respectifs $R_T = 150 \cdot 10^6$ km et $R_J = 780 \cdot 10^6$ km, et décrits dans le même sens. Jupiter est modélisée par une sphère de diamètre $d_J = 140\,000$ km.

Figure 3

12) Calculer sous quel angle maximal α_0 on voit Jupiter depuis la Terre. Cette situation, la plus favorable à l'observation, porte le nom d'opposition de Jupiter. Proposer une explication pour ce nom.

On admet que chacune des orbites est décrite à vitesse constante (pas la même pour la Terre et Jupiter) et que les périodes de révolution (temps pour décrire une orbite) T_T et T_J vérifient la troisième loi de Kepler : $T_T^2 = K \cdot R_T^3$ et $T_J^2 = K \cdot R_J^3$ où K est une constante (la même pour les deux planètes). On donne $T_T = 365{,}25$ jours.

13) Calculer T_J et le temps qui s'écoule entre deux oppositions de Jupiter.

À cause des imperfections du modèle, la valeur de α_0 n'est pas exactement celle trouvée à la question 8, mais $\alpha_0 = 50''$ ($1° = 3600''$). On adoptera cette valeur dans toute la suite du problème.

14) Est-il possible de distinguer à l'œil nu des détails situés dans l'atmosphère de Jupiter (nuages, cyclones, etc.) ? Si oui, quel doit être la taille minimale de ces « détails » ?

L'astronome amateur désire photographier la planète Jupiter vue depuis la Terre à l'opposition. Il utilise une lunette astronomique (voir figure 4 à gauche) dont l'objectif est assimilé à une lentille mince convergente L_1 de diamètre $d_1 = 235$ mm et de distance focale $f_1' = 2350$ mm, monté sur un tube $\mathcal{T}_1$. Une caméra CCD est fixée sur un tube $\mathcal{T}_2$ appelé « porte oculaire ». La mise au point est faite en faisant coulisser $\mathcal{T}_2$. Dans toute la suite, on se placera dans le cadre de l'optique géométrique et dans les conditions de Gauss.

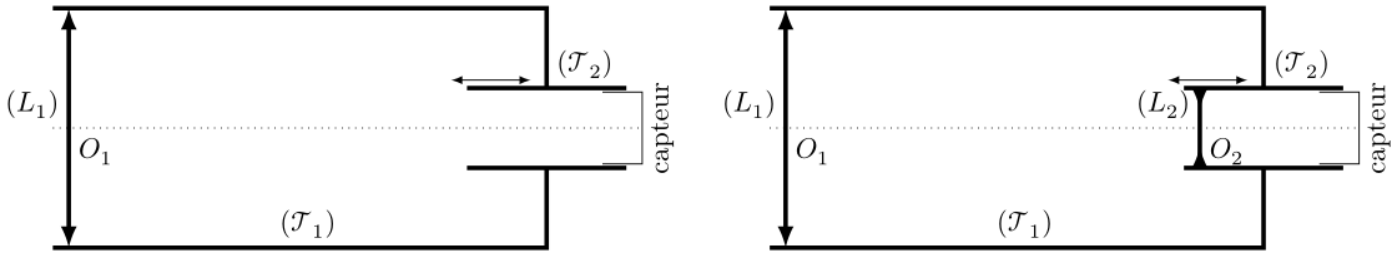


Figure 4

Le fabricant de la caméra donne les caractéristiques techniques suivantes pour le capteur : modèle ICX618, type CCD, noir et blanc, rectangulaire, de diagonale $d_c = 4{,}48$ mm, surface $S_c = 9{,}63\ \mathrm{mm}^2$, comptant $N = 307\ 200$ pixels de forme carrée.

15) Calculer la largeur ℓ_c et la hauteur h_c du capteur, ainsi que la largeur ε_c d'un pixel.

16) Expliquer pourquoi il est très raisonnable de considérer que Jupiter est située à l'infini, ce qu'on supposera pour toute la suite. Quelle est alors la distance entre la lentille et le capteur ?

17) En déduire la largeur, exprimée en nombre de pixels, de l'image de Jupiter sur le capteur.

Pour estimer la précision avec laquelle on doit faire la mise au point, on suppose que le capteur se trouve à une distance $\pm\varepsilon_0$ de la position assurant une image parfaitement nette ($+\varepsilon_0$ s'il est décalé vers la droite et $-\varepsilon_0$ s'il est décalé vers la gauche).

18) En raisonnant sur les rayons issus du point objet de Jupiter situé sur l'axe optique de L_1, expliquer physiquement (faire un schéma) que l'image de ce point sur le capteur n'est plus ponctuelle et forme une tache de largeur ε_t. Exprimer ε_t en fonction de ε_0, d_1 et f_1'. On distinguera les deux sens possibles de décalage du capteur, vers la droite et vers la gauche.

19) À quelle condition sur ε_c et ε_t cette non ponctualité ne se remarquera pas sur le capteur utilisé ? En déduire la valeur maximale autorisée pour ε_0 sans qu'il y ait d'incidence sur la netteté de l'image formée sur le capteur.

Pour obtenir une image plus grande de la planète, on intercale une lentille de Barlow, modélisée ici par une lentille mince (L_2) divergente, de distance focale f_2', placée à la distance $D_{2c} = 200$ mm du capteur (figure 4 à droite). La mise au point se fait en translatant l'ensemble ($\mathcal{T}_2$ -capteur), fixé sur le tube porte oculaire. On notera D_{12} la distance entre (L_1) et (L_2) et on admettra que F_1' est situé entre (L_2) et le capteur.

20) Comment faut-il choisir f_2' et à quelle valeur doit-on régler D_{12} pour que le dispositif produise sur le capteur de la caméra une image de Jupiter trois fois plus large que précédemment ?

21) Le dispositif de Barlow est alors qualifié de « tripleur de focale ». Proposer une justification à ce terme.

---------- Fin de la partie II ----------

III - Capture d'empreintes digitales par réflexion totale

Il existe différentes technologies de capteurs d'empreinte digitale, c'est-à-dire de dispositifs permettant d'obtenir une image numérisée d'une empreinte digitale, le plus souvent à des fins d'identification. Certaines de ces technologies sont embarquées dans des smartphones. La technologie dite « capteur optique d'empreinte digitale » est très employée, elle repose sur le phénomène de réflexion totale qui est l'objet de cette étude.

Le doigt est posé à plat sur l'hypoténuse d'un prisme droit isocèle taillé dans un verre d'indice optique noté n. Il est éclairé par une diode laser de longueur d'onde λ_0 dans le vide. L'image de l'empreinte digitale à travers un système optique est formée sur un capteur CCD puis numérisée. La figure 2.2 décrit le schéma de principe de ce dispositif.

Figure 2.1 Capteur d'empreinte digitale (Wikimedia, Rachmaninoff, 2009-10-21)

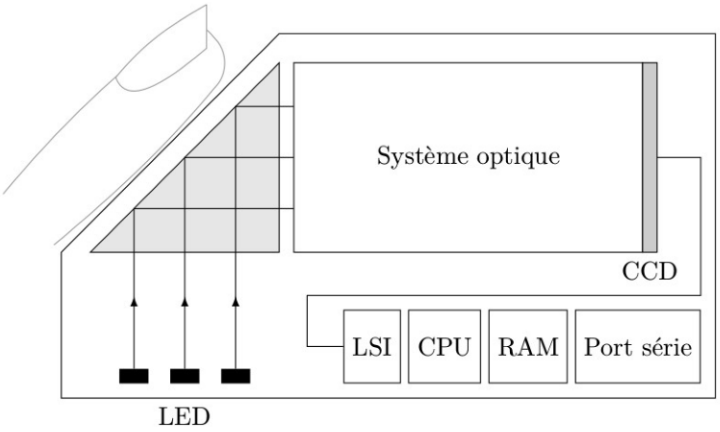


Figure 2.2 Principe d'un capteur optique d'empreinte digitale

En première approche, le système optique se résume à la traversée d'un dioptre ($\mathcal{D}$) et d'une lentille convergente ($\mathcal{L}$) (figure 2.3). Si A est un point objet de l'empreinte digitale, alors on note A_1 l'image de A à travers le dioptre ($\mathcal{D}$) et A'_1 celle de A_1 à travers la lentille ($\mathcal{L}$) :

$$A \xrightarrow{\mathcal{D}} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} A'_1$$

On définit également les longueurs algébriques suivantes :

$$D_1 = \overline{A_1A'_1} \qquad D = \overline{AA'_1} \qquad p = \overline{OA_1} \qquad p' = \overline{OA'_1}$$

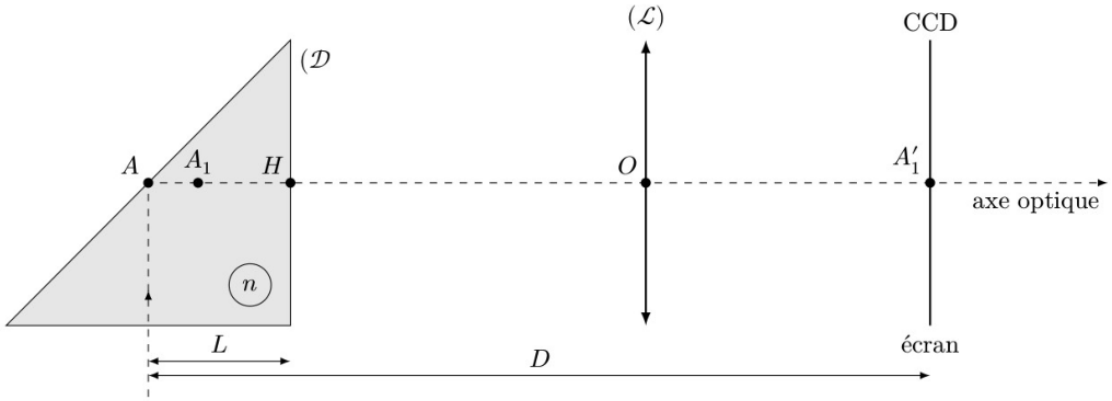


Figure 2.3 Schéma optique

III.1 - Conception du système optique

L'objectif ici est de choisir la distance focale f' de la lentille et sa position, par exemple en déterminant p'. À cet effet, on donne $n = 1{,}5$, $L = 3$ cm, $D = 10$ cm et le grandissement transversal $\gamma = \frac{p'}{p}$ du système optique.

22) Montrer que, dans les conditions de Gauss, la relation de conjugaison entre A et A_1 par le dioptre plan formé par la face de sortie du prisme s'écrit $\overline{HA_1} = \frac{\overline{HA}}{n}$.

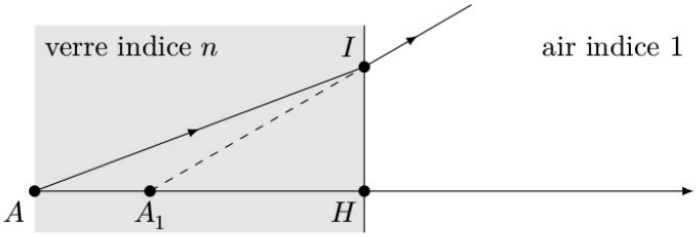


Figure 2.4

23) Exprimer p et p' en fonction de D_1 et de γ. Déterminer alors f' en fonction de D_1 et de γ.

24) On souhaite déterminer la condition portant sur la distance focale f' d'une lentille convergente si l'on veut former l'image réelle sur un écran situé à une distance D_1 d'un objet réel. En remarquant qu'il faut $\gamma < 0$ pour obtenir une image réelle d'un objet réel, montrer que le rapport $\frac{D_1}{f'}$ est inférieurement borné. En déduire l'inégalité vérifiée par f'.

25) On suppose $\gamma = -2$. Exprimer puis calculer p' et f'.

26) On souhaite avoir une image la plus agrandie possible, mais sans augmenter l'encombrement du dispositif, ce qui impose de ne pas augmenter la longueur D_1. Dans quel sens faut-il faire varier f' ? En pratique, quelle limitation rencontre-t-on ?

III.2 - Résolution de l'image

Dans cette sous-partie, on fait abstraction du prisme, on considère que l'empreinte est positionnée en A_1 au lieu de A.

$$A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}} A'_1$$

Une empreinte digitale est faite de sillons de profondeur moyenne $e = 3\ \mu\text{m}$ et dont deux crêtes voisines parallèles sont distantes de $a = 100\ \mu\text{m}$. On note ℓ_c la largeur d'un pixel (considéré comme étant de forme carrée) du capteur CCD. On cherche à obtenir l'image des crêtes du sillon sur le capteur CCD : la lentille conjugue le plan des crêtes, où se situe A_1, à l'écran CCD (figure 2.5).

Sur la figure 2.6, les points M_1, M_2 et M_3 détaillent le motif de l'empreinte et leurs images respectives M_1', M_2' et M_3' détaillent l'image de l'empreinte. On remarque que le point M_2' ne se forme pas tout à fait sur la surface du CCD, les rayons lumineux délimités par la monture de la lentille viennent former une petite tâche circulaire de diamètre ϕ.

On note p' la distance entre la lentille et la surface du CCD et $|p|$, avec $p < 0$, la distance entre la lentille et le plan formé par les points objets M_1 et M_3. On note alors $\gamma = \frac{p'}{p}$ le grandissement. On donne $\gamma = -2$.

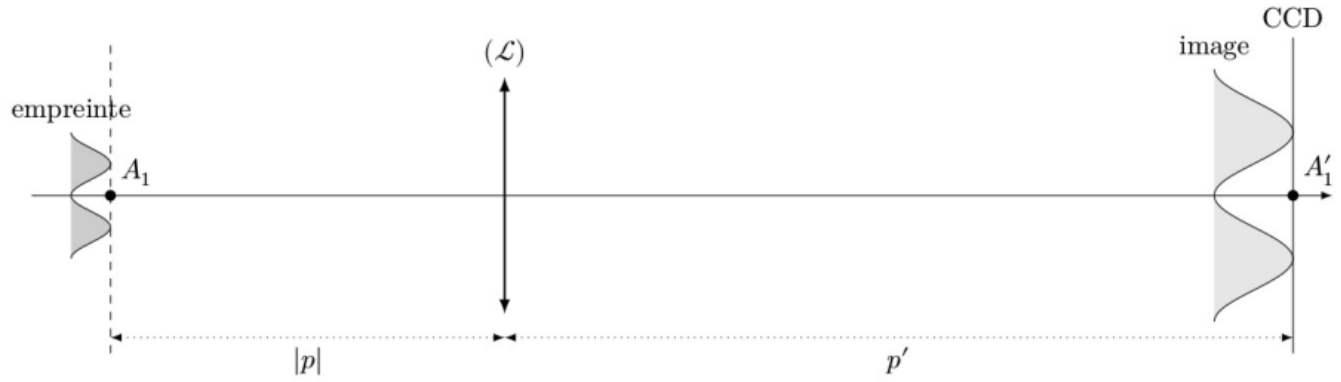


Figure 2.5

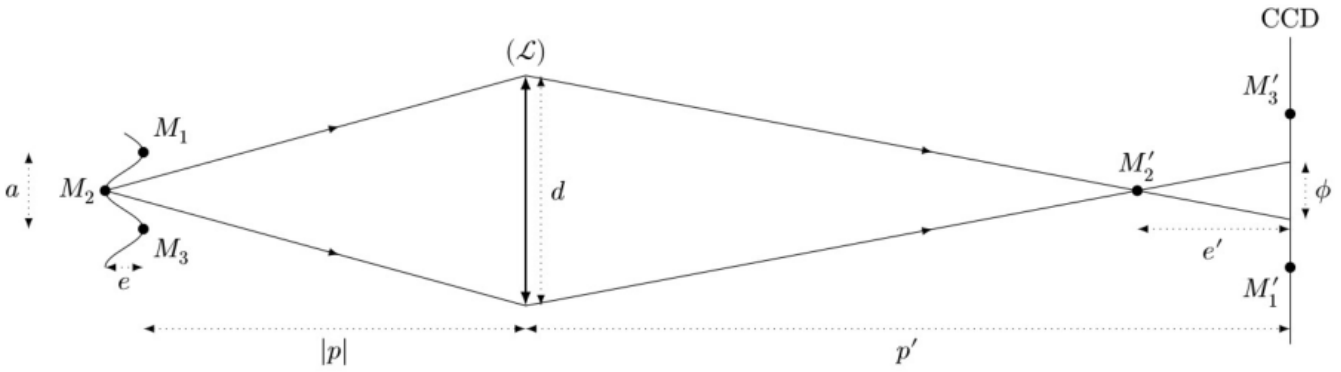


Figure 2.6 Formation de l'image d'un sillon d'empreinte digitale

27) À quelle condition sur a et sur ℓ_c peut-on distinguer deux crêtes successives ? Quelle taille de pixel recommandez-vous ?

28) On note d le diamètre de la monture de la lentille $(\mathcal{L})$. Montrer que $\phi = \frac{\gamma d e}{p}$ dans l'approximation où $e \ll |p|$ et $e' \ll p'$. <u>Indication</u> : on pourra montrer dans un premier temps, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de la relation de conjugaison de Descartes au point M_2, que $e' \simeq 2\gamma e$.

29) On voudrait que seules les crêtes soient nettes sur l'image et donc que les creux apparaissent flous. Pour cela, il faudrait que le diamètre ϕ de la tache excède la distance $\mathrm{M}_1'\mathrm{M}_3'$. Quelle inégalité doit alors vérifier le diamètre d de la monture ? Montrer que c'est contraire au respect des conditions de Gauss.

III.3 - Réflexion totale

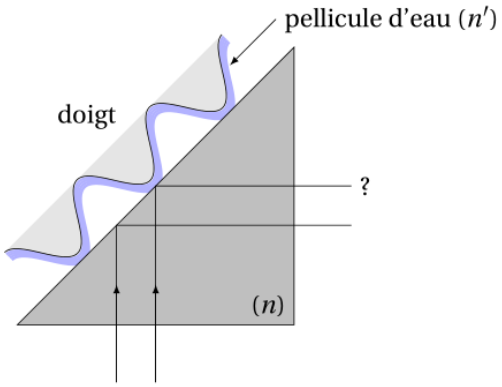
Un montage simple avec une lentille ne permet donc pas de capturer facilement les empreintes digitales de sorte que seules les crêtes apparaissent sur l'image. On reprend donc le dispositif complet, incluant le prisme.

30) Énoncer soigneusement les lois de Snell-Descartes.

31) Définir la réflexion totale et en donner les conditions.

32) Étant donné la position de l'empreinte digitale, si on s'en tient strictement à l'énoncé des lois de Descartes, peut-on éclairer le doigt, afin de former son image sur le capteur CCD ? On rappelle que $n = 1{,}5$.

33) En réalité, le doigt est toujours entouré d'une fine pellicule d'eau (indice optique $n' = 1{,}3$). Cette pellicule est en contact avec le dioptre au niveau des crêtes, mais pas au niveau des creux. Qu'advient- t-il à un rayon lumineux frappant le dioptre entre le prisme et la pellicule d'eau ?



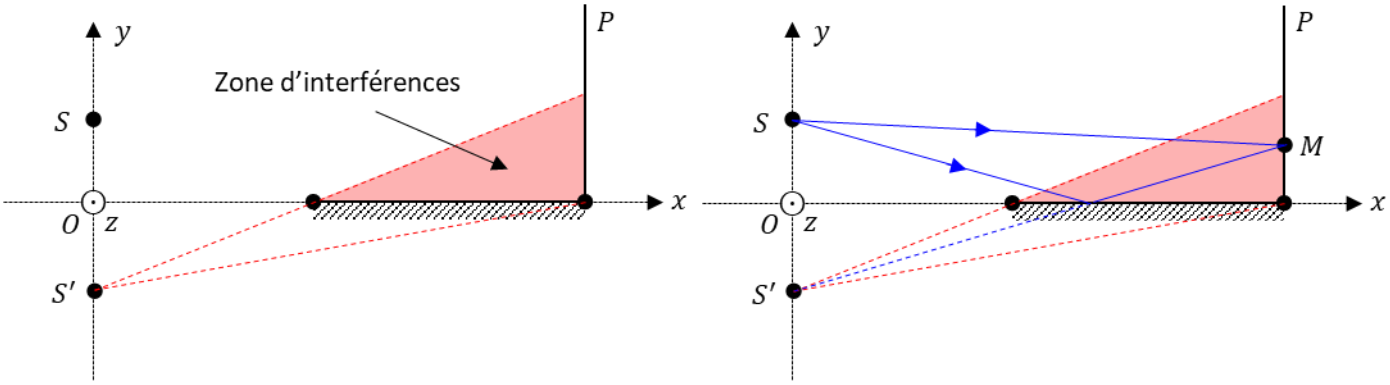
34) Expliquer alors comment l'utilisation des phénomènes de réfraction et réflexion totale permettent de résoudre le problème décrit au paragraphe III.2.

---------- Fin de la partie III ----------

I - Miroir de Lloyd

1) S' est le symétrique de S par rapport au miroir. Donc : $S' = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Le faisceau directement émis par S éclaire tout l'espace. Le faisceau réfléchit par le miroir correspond à la zone en rouge sur la figure ci-dessous. Il s'agit donc de la zone où l'on trouvera des interférences.



3) Voir schéma ci-dessus.

4) Par définition : $\delta = (S'M) - (SM)$

Or,

$$S'M = \sqrt{(d+\ell)^2 + (y+h)^2 + z^2} = (d+\ell)\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{y+h}{d+\ell}\right)^2 + \left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2}_{\varepsilon}} = (d+\ell)\left[1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y+h}{d+\ell}\right)^2 + \left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2\right]\right]$$

Et,

$$SM = (d+\ell)\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{y-h}{d+\ell}\right)^2 + \left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2}_{\varepsilon}} = (d+\ell)\left[1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y-h}{d+\ell}\right)^2 + \left(\frac{z}{d+\ell}\right)^2\right]\right]$$

Ainsi :

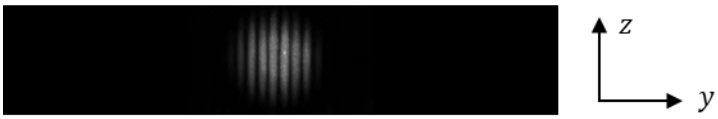
$$\delta = (d+\ell)\left[\frac{yh}{(d+\ell)^2} - \frac{-yh}{(d+\ell)^2}\right] = \boxed{\frac{2yh}{d+\ell}}$$

Au point B, $y = 0$, donc $\delta = 0$. C'est une **interférence constructive** (car δ est un multiple entier de la longueur d'onde).

5) Formule de Fresnel : $\mathrm{I(M)} = 2\mathrm{I}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\,\delta\right)\right) = \boxed{2\mathrm{I}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot\frac{2yh}{d+\ell}\right)\right)}$

6) Interfrange = période spatiale de $\mathrm{I(M)}$. Donc : $\boxed{i = \lambda_0 \cdot \frac{d+\ell}{2h}}$

7) Les franges sont selon l'axe des y.



8) Je mesure avec une règle graduée au millimètre 7 interfranges pour 1 cm. Ainsi :

$$\overline{7i} = 10{,}5\ \mathrm{mm} \quad \text{et} \quad \Delta(\overline{7i}) = 0{,}5\ \mathrm{mm}$$

Ainsi :

$$\bar{i} = 1{,}500 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \Delta(\bar{i}) = 0{,}0714 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad u(\bar{i}) = \frac{\Delta(\bar{i})}{\sqrt{3}} = 0{,}0412 \text{ mm}$$

<u>Bilan</u> :

$$\boxed{i = 1{,}50 \pm 0{,}04 \text{ mm}}$$

9) Calculons l'écart normalisé :

$$\boxed{E_N = \frac{1{,}50 - 1{,}497}{\sqrt{(0{,}04)^2 + (0{,}013)^2}} = 0{,}07 < 2}$$

Les mesures sont compatibles.

10) En prenant en compte le facteur de grandissement :

$$i = \lambda_0 \cdot \frac{d + \ell}{2h} = \frac{i_0}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{5\lambda_0}{i_0} \cdot \frac{d + \ell}{2} = 0{,}25 \text{ mm}}$$

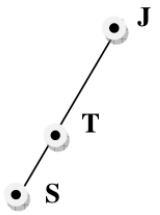
11) Un décalage d'une demi-interfrange correspond à observer une **interférence destructive** en B. Cela revient donc à ajouter une demi-longueur d'onde à la différence de marche, donc à ajouter π au déphasage.

---------- Fin de la partie I ----------

II - Observation de Jupiter

12) L'angle maximal correspond à la distance Terre - Jupiter la plus petite soit $d_{min} = R_J - R_T$. Ainsi, en faisant l'approximation des petits angles :

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{d_J}{R_J - R_T} = 2{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 45\,''}$$



Le Soleil et Jupiter sont en opposition par rapport à la Terre d'où le terme utilisé.

13) On a :

$$\boxed{T_J = T_T \left(\frac{R_J}{R_T}\right)^{3/2} = 4{,}33 \cdot 10^3 \text{ jours}}$$

14) Non c'est impossible car la taille d'un « détail » sera nécessairement inférieur à la taille angulaire de la planète, elle-même légèrement inférieure à la limité de résolution de l'œil 60 ''.

15) La surface vaut : $S_c = \ell_c \cdot h_c$ et la diagonale vaut : $d_c = \sqrt{\ell_c^2 + h_c^2}$.

On en déduit :

$$(\ell_c + h_c)^2 = d_c^2 + 2S_c \quad \text{et} \quad (\ell_c - h_c)^2 = d_c^2 - 2S_c$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} \ell_c &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{d_c^2 + 2S_c} + \sqrt{d_c^2 - 2S_c}\right) = 3{,}59 \text{ mm} \\ h_c &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{d_c^2 + 2S_c} - \sqrt{d_c^2 - 2S_c}\right) = 2{,}69 \text{ mm} \end{aligned}}$$

La surface d'un pixel carré vaut ε_c^2. On en déduit donc la taille d'un pixel :

$$\boxed{\varepsilon_c = \sqrt{\frac{S_c}{N}} = 5{,}6 \text{ µm}}$$

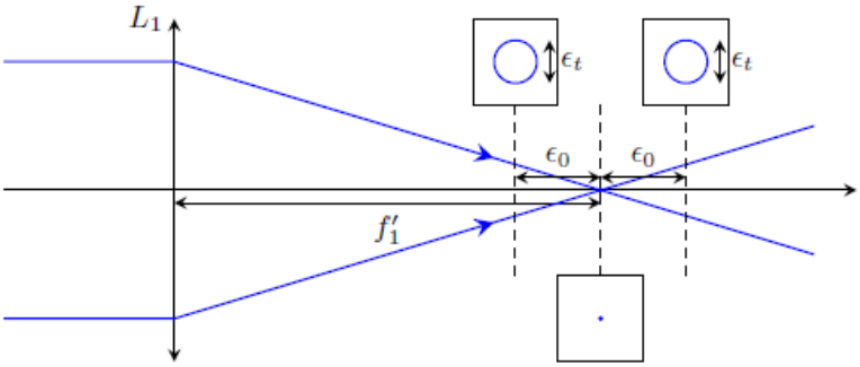
16) La distance Terre - Jupiter la plus petite est $d_{min} = 630 \cdot 10^6$ km $\gg f_1' = 2{,}350$ m. On pourra bien considérer Jupiter à l'infini. Le capteur est dans le plan focal image de la lentille (distance $f_1' = 2{,}350$ m).

17) L'angle sous lequel est vu le diamètre de Jupiter est $\alpha_0 = 50\,'' = 2{,}42 \cdot 10^{-4}$ rad. L'image a donc : une largeur :

$$\tan(\alpha_0) \simeq \alpha_0 = \frac{L}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad L = \alpha_0 f_1' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{\varepsilon_c} = \frac{\alpha_0 f_1'}{\varepsilon_c} = 102 \text{ pixels}}$$

18) Quel que soit le sens de décalage du porte oculaire, l'image d'un point est une tache de largeur :

$$\boxed{\varepsilon_t = \varepsilon_0 \frac{d_1}{f_1'}}$$



19) Cette non-ponctualité ne se remarquera pas si $\boxed{\varepsilon_t < \varepsilon_c}$. Donc si :

$$\boxed{\varepsilon_0 < \varepsilon_c \frac{f_1'}{d_1} = \varepsilon_{0,max} = 56 \text{ µm}}$$

20) On a :

$$A(-\infty \text{ sur } \Delta) \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} A_c(\text{capteur})$$

<u>Remarque</u> : le grandissement γ est positif car F_1' est situé entre O_2 et A_c.

Relation de grandissement sur la lentille L_2 :

$$\gamma_2 = +3 = \frac{\overline{O_2A_c}}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{D_{2c}}{\overline{O_2F_1'}} \quad \Rightarrow \quad D_{12} = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'O_2} = f_1' - \overline{O_2F_1'} = f_1' - \frac{D_{2c}}{3}$$

Ainsi : $\boxed{D_{12} = f_1' - \frac{D_{2c}}{3} = 2283 \text{ mm}}$

Relation de conjugaison de Descartes sur L_2 :

$$\frac{1}{D_{2c}} - \frac{1}{\overline{O_2F_1'}} = \frac{1}{f_2'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_2' = \left(\frac{1}{D_{2c}} - \frac{3}{D_{2c}}\right)^{-1} = -100 \text{ mm}}$$

21) Avec une lentille convergente de distance focale équivalente f', l'image de Jupiter est de largeur $L = \alpha_0 f'$: l'image sera trois fois plus grande si la distance focale est trois fois plus grande d'où le terme de « tripleur de focale ». L'encombrement est moindre avec deux lentilles.

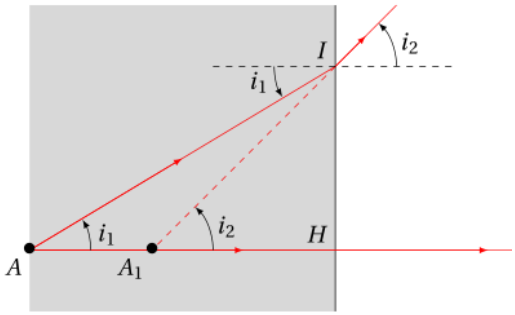
---------- Fin de la partie II ----------

III - Capture d'empreintes digitales par réflexion totale

III.1 - Conception du système optique

22) Exemple traité en cours (O2). On a :

$$\tan(i_1) = \frac{\overline{HI}}{-\overline{HA}} \qquad \tan(i_2) = \frac{\overline{HI}}{-\overline{HA_1}} \qquad n\sin(i_1) = \sin(i_2)$$



Dans les conditions de Gauss, on a bien :

$$\boxed{\overline{HA_1} = \overline{HA} \cdot \frac{i_1}{i_2} = \frac{\overline{HA}}{n}}$$

23) Par définition : $\gamma = \frac{p'}{p}$ et $D_1 = \overline{AA_1'} = \overline{AO} + \overline{OA_1'} = p' - p$. Ainsi :

$$\boxed{p = \frac{D_1}{\gamma - 1}} \quad \text{et} \quad \boxed{p' = \frac{\gamma\, D_1}{\gamma - 1}}$$

Relation de conjugaison :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma\, D_1} - \frac{\gamma - 1}{D_1}\right)^{-1} = \frac{\gamma\, D_1}{-\gamma^2 + 2\gamma - 1} = \boxed{-\frac{\gamma\, D_1}{(\gamma - 1)^2}}$$

24) Comme nous l'incite l'énoncé, posons la fonction :

$$g(\gamma) = \frac{D_1}{f'} = -\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma}$$

Calculons la dérivée :

$$g'(\gamma) = -1 + \frac{1}{\gamma^2}$$

Déterminons le tableau de variation de cette fonction sur $]-\infty,\ 0[$.

γ	$-\infty$		-1		0^-
$g'(\gamma)$	-1	$-$	0	$+$	$+\infty$
$g(\gamma)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction admet un minium en $\gamma = -1$. On en déduit :

$$g(\gamma) \geq 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_1 \geq 4f'}$$

25) Trouvons dans un premier temps la valeur de D_1.

$$D_1 = \overline{A_1A_1'} = \overline{A_1H} + \overline{HA} + \overline{AA_1'} = L\left(\frac{1}{n} - 1\right) + D = 9{,}0 \text{ cm}$$

On suppose $\gamma = -2$. La distance focale de la lentille vaut :

$$\boxed{f' = \frac{D_1}{g(-2)} = 2{,}0 \text{ cm}}$$

Cherchons la distance lentille-écran $p' = \overline{OA_1'}$.

$$\gamma = -2 = \frac{p'}{p} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p' = -2p = -2\frac{D_1}{\gamma - 1} = 6{,}0 \text{ cm}}$$

26) On a (avec $|\gamma| = -\gamma$) :

$$g(\gamma) = \frac{D_1}{f'} = -\gamma + 2 - \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad dg = -D_1 \frac{df'}{f'^2} = \left(-1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) d\gamma \quad \Rightarrow \quad d|\gamma| = \underbrace{\frac{D_1}{f'^2\left(\frac{1}{|\gamma|^2} - 1\right)}}_{<0} df'$$

On veut qu'une variation de f' fasse augmenter $|\gamma|$, ie. que $d|\gamma| > 0$. Il faut donc $\boxed{df' < 0}$, c'est-à-dire diminuer f'. Or, en diminuant f', on augmente la courbure des dioptres. On peut alors quitter l'hypothèse lentille mince. De plus, on approche la lentille de l'objet. La distance objet-lentille n'est plus négligeable devant la taille de l'objet : son diamètre apparent devient grand, on quitte les conditions de Gauss.

Enfin, $|p|$ diminue avec f' mais est limité par l'épaisseur du verre du prisme : $|p| > D - D_1$.

III.2 - Résolution de l'image

27) Soit a la distance entre deux crêtes sur le doigt (objet). Ils sont distinguables si leurs images sont séparées de $2\ell_c$ (crête sur un pixel, creux sur le voisin, puis crête sur le pixel d'après). Or, par définition du grandissement, cet écart vaut

$$|\gamma| a \geq 2\ell_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ell_c \leq 100\ \mu\text{m}}$$

28) Relation de conjugaison sur M_2 :

$$\frac{1}{p' - e'} - \frac{1}{p - e} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p'}\left(1 - \frac{e'}{p'}\right)^{-1} - \frac{1}{p}\left(1 - \frac{e}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{f'}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{p'}\left(1 + \frac{e'}{p'}\right) - \frac{1}{p}\left(1 + \frac{e}{p}\right) \simeq \frac{1}{f'}$$

Or, $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$. On en déduit :

$$\frac{e'}{p'^2} - \frac{e}{p^2} \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad e' \simeq \left(\frac{p'}{p}\right)^2 e = \gamma^2 e$$

On travaille ensuite dans les triangles rectangles de sommet M_2' :

$$\tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \frac{\phi/2}{e'} = \frac{d/2}{p'} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{e'd}{p' - e'} = \frac{e'd}{p'}\left(1 - \frac{e'}{p'}\right)^{-1} \simeq \frac{e'd}{p'}\left(1 + \frac{e'}{p'}\right)$$

Or, $\frac{e'}{p'} = \frac{\gamma^2 e}{\gamma p} = \frac{\gamma e}{p}$. Ainsi : $\phi \simeq \frac{\gamma e d}{p}\left(1 + \frac{\gamma e}{p}\right)$. On continue de travailler à l'ordre 1, ainsi : $\boxed{\phi \simeq \frac{\gamma e d}{p}}$.

29) On veut :

$$\phi > \mathrm{M}_1'\mathrm{M}_3' = |\gamma|\ \mathrm{M}_1\mathrm{M}_3 = |\gamma| a \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\gamma e d}{p}\right| > |\gamma| a \quad \Rightarrow \quad \boxed{d > \frac{|p| a}{e}}$$

Dans ce cas, les rayons extrémaux arrivent sur le bord de la lentille avec un angle θ tel que :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{d/2}{|p|} > \frac{a}{2e} \quad \Rightarrow \quad \frac{\theta}{2} > \arctan\left(\frac{a}{2e}\right) = 1{,}5\ \text{rad} > 1\ \text{rad}}$$

Cette condition n'est pas compatible avec les conditions de Gauss.

III.3 - Réflexion totale

30) Cf. cours : 3 lois à énoncer (rayons coplanaires, angle de réflexion, angle de réfraction).

31) Réflexion totale : il n'existe pas de rayon réfracté. Il faut $n_1 > n_2$ et $i > i_{lim} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$.

32) On remarque que les conditions sont vérifiées :

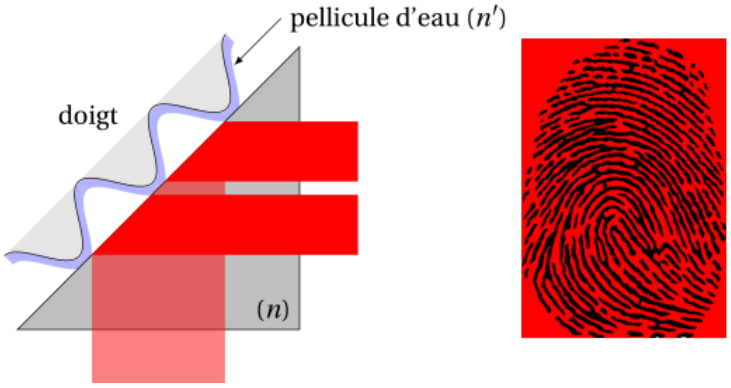
- $n = 1{,}5 > 1$

- $i_{lim} = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 42\,° < i = 45\,°$

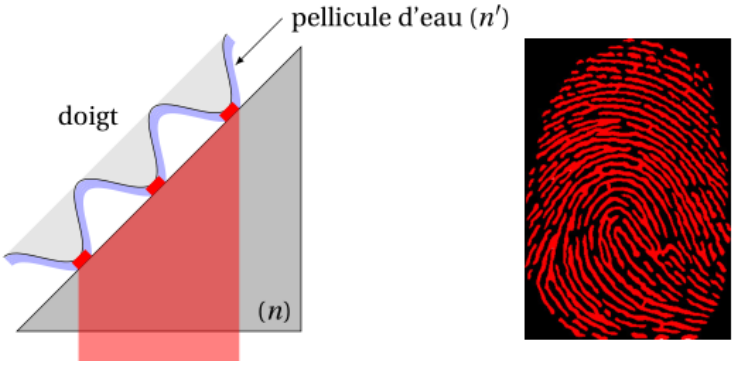
Il y a donc toujours réflexion totale : le laser n'éclaire donc pas l'empreinte.

33) L'angle limite au niveau de la pellicule d'eau (de la crête donc) vaut alors $i'_{lim} = \arcsin\left(\frac{1,3}{1,5}\right) = 60\,° > i = 45\,°$. Il y a réfraction.

34) <u>Interprétation 1</u> (cas où la lumière du laser frappe le capteur sans lentille intermédiaire) : là où il y une crête, la lumière du laser est réfractée, elle n'arrive qu'en petite quantité au niveau du capteur. Au contraire, au niveau des creux, la lumière est réfléchie totalement et atteint massivement le capteur : l'empreinte apparaît en négatif.



<u>Interprétation 2</u> (cas où on place la lentille pour imager le dioptre) : là où il y une crête, la lumière du laser est réfractée et éclaire la crête. Au contraire, au niveau des creux, la lumière est réfléchie et n'éclaire pas le creux. Seules les crêtes sont alors des sources de lumière. L'empreinte apparaît en positif.



---------- Fin de la partie III ----------